

(54) [Title of the Invention] Computer-assisted
Simulation Method Obtaining an Electromagnetic Field
of an Object

(57) [Abstract]

5 [Object] The electromagnetic field of an object is
obtained with a computer, so that the electromagnetic
compatibility of the object is ensured before the object
is implemented.

[Means for Solving the Problem] Global multipole
10 expansion which represents the operations of an electric
charge and an electric current to a distant point in
each partial region in the form of multipole expansion,
and local multipole expansion which represents the
operations of an electric charge and an electric current
15 to a point in each partial region are performed, and
the global multipole expansion and the local multipole
expansion are superposed, whereby the magnetic field
of an object is obtained.

[What is claimed is]

20 [claim 1] A computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object including
a plurality of regions, a plurality of charges and a
plurality of currents, comprising the steps of:

a) performing global multipole expansion which
25 represents operations of the plurality of charges and

the plurality of currents to a distant point in each of the plurality of partial regions in a form of multipole expansion, and local multipole expansion which represents operations of the plurality of charges and the plurality of currents at a point in each of the plurality of partial regions in a form of multipole expansion; and

b) obtaining the electromagnetic field of the object by superposing the global multipole expansion and the local multipole expansion in the plurality of partial regions.

[claim 2] The computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object according to claim 1, wherein

the following steps obtaining an electromagnetic field of an object are repeatedly executed up to a given small error scale, $I=0$ satisfied as an initial condition, the steps being:

a) calculating the global multipole expansion by using a global multipole coefficient based on $C^g=GI$, C^g being a vector having a global multipole coefficient in a plurality of partial regions, I being a vector representing a given current distribution, and G being a matrix determining a global multipole coefficient in

one corresponding partial region among the plurality of partial regions in the given current distribution I;

- b) calculating the local multipole expansion by using
5 a local multipole coefficient based on $c^1 = Tc^g$, c^1 being a vector having the local multipole coefficient in the plurality of partial regions, and T being a moving matrix used to form local multipole by combining global multipoles; and
- 10 c) obtaining an electromagnetic field from $ZI = Z' + Lc^1$, Z being an impedance matrix, Z' being part of the impedance matrix Z representing a connection between the plurality of partial regions, and L being a matrix evaluating a local multipole coefficient.

15

[claim 3] The computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object according to claim 1 or 2, wherein

the plurality of partial regions are identical in
20 size.

[claim 4] The computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object according to claim 1 or 2, wherein

25 a size of a partial region is formed in proportion

to a distance from an observer region.

[claim 5] The computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object according
5 to any one of claims 1 to 4, wherein
one corresponding partial region among the
plurality of partial regions is respectively allocated
to one zone having a uniform physical characteristic.

10 [claim 6] The computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object according
to any one of claims 1 to 5, wherein
one corresponding partial region among the
plurality of partial regions is partitioned into 8 zones
15 at a maximum.

[claim 7] The computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object according
to any one of claims 2 to 6, wherein
20 an element which is a constituent portion of a
partial region of an object and has an impedance is
directly considered as an impedance directly in a matrix
 Z' .

25 [claim 8] The computer-assisted simulation method

obtaining an electromagnetic field of an object according to any one of claims 1 to 7, wherein

an electromagnetic field is obtained for a given frequency.

5

[claim 9] The computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object according to claim 8, wherein:

a given frequency is determined from a minimum or
10 a maximum frequency; and

the computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object is started from the minimum frequency and is continued to the maximum frequency in a given step width, and an electronic field
15 is obtained at each time.

[claim 10] The computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object according to claim 8, wherein:

20 a given frequency is determined from a minimum or a maximum frequency; and

the computer-assisted simulation method obtaining an electromagnetic field of an object is started from the minimum frequency and is continued to the maximum
25 frequency in a given step width, and an electronic field

is obtained at each time.

[claim 11] The computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object according
5 to claim 8, wherein:

a given frequency is determined from a minimum or
a maximum frequency; and

the computer-assisted simulation method obtaining
an electromagnetic field of an object is started from
10 a frequency between the minimum frequency and the maximum
frequency and is continued to the maximum frequency or
the minimum frequency in a given step width, and an
electronic field is obtained at each time.

15 [claim 12] The computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object according
to any one of claims 1 through 11, wherein

the global multipole expansion is performed not
in accordance with a basis function but for each element,
20 so that stability at a low frequency is ensured.

[claim 13] The computer-assisted simulation method
obtaining an electromagnetic field of an object according
to any one of claims 1 through 12, wherein

25 electromagnetic compatibility (EMC) of an object

is obtained.



PATENT ABSTRACTS OF JAPAN

(11) Publication number: **11038059 A**(43) Date of publication of application: **12.02.99**

(51) Int. Cl. **G01R 29/08**
G06F 17/00
G06F 17/50

(21) Application number: **10163514**
 (22) Date of filing: **11.06.98**
 (30) Priority: **11.06.97 DE 97 19724718**

(71) Applicant: **SIEMENS AG**
 (72) Inventor: **GERNOT HOYLER**

(54) **COMPUTER-AIDED SIMULATION METHOD FOR
 OBTAINING ELECTROMAGNETIC FIELD OF
 OBJECT**

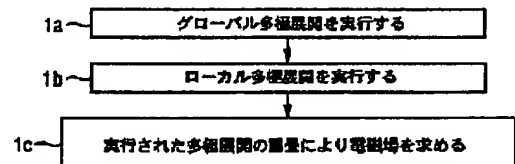
(57) Abstract:

PROBLEM TO BE SOLVED: To guarantee electromagnetic environmental compatibility by obtaining the electromagnetic field of an object with the superposition of the global multipolar deployment indicating the action of electric charges and currents to a long-distance point via multipolar deployment and the local multipolar deployment indicating the action of electric charges and currents to a point via multipolar deployment.

SOLUTION: The electromagnetic field of an object containing multiple partial regions and containing multiple electric charges and currents is obtained by the computer-aided simulation method. Global multipolar deployment and local multipolar deployment are implemented in the partial regions, the global multipolar deployment indicates the action of electric charges and currents to a long-distance point via multipolar deployment, and likewise the local multipolar deployment indicates the action of electric charges and currents to a point in multiple partial regions in the form of multipolar deployment. The global multipolar deployment is implemented for the investigation object sub-divided into partial regions in step 1a. The local

multipolar deployment is implemented for the object sub-divided into partial regions in step 1b, and the electromagnetic field of the object is finally obtained via the superposition of the multipolar deployments in step 1c.

COPYRIGHT: (C)1999,JPO



(19) 日本国特許庁 (J P)

(12) 公開特許公報 (A)

(11) 特許出願公開番号

特開平11-38059

(43) 公開日 平成11年(1999) 2月12日

(51) IntCl.⁸

識別記号

F I

G 0 1 R 29/08

G 0 1 R 29/08

Z

G 0 6 F 17/00

G 0 6 F 15/20

D

17/50

15/60

6 1 2 A

審査請求 未請求 請求項の数13 O L (全 27 頁)

(21) 出願番号 特願平10-163514

(22) 出願日 平成10年(1998) 6月11日

(31) 優先権主張番号 1 9 7 2 4 7 1 8 . 0

(32) 優先日 1997年 6月11日

(33) 優先権主張国 ドイツ (DE)

(71) 出願人 390039413

シーメンス アクチエンゲゼルシャフト

SIEMENS AKTIENGESEL

LSCHAFT

ドイツ連邦共和国 D-80333 ミュンヘン

ヴィッテルスバッハープラッツ 2

(72) 発明者 ゲルノート ホイラー

ドイツ連邦共和国 ミュンヘン シュベル

パーシュトラッセ 7

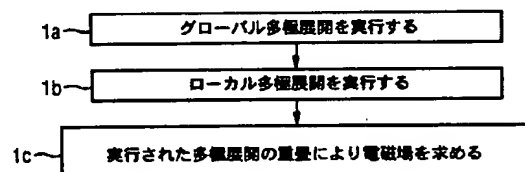
(74) 代理人 弁理士 矢野 敏雄 (外 3 名)

(54) 【発明の名称】 物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法

(57) 【要約】

【課題】 物体の電磁場をコンピュータにより求め、これにより既に物体を実現する前に物体の電磁環境両立性を保証する。

【解決手段】 それぞれの部分領域の中で、遠距離の点への電荷及び電流の作用を多極展開の形で表すグローバル多極展開と、それぞれの部分領域の中の点への電荷及び電流の作用を表すローカル多極展開とを行い、グローバル多極展開とローカル多極展開との重畳により物体の電磁場を求める。



【特許請求の範囲】

【請求項1】 複数の部分領域を含み複数の電荷及び複数の電流を含む物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法において、

a) 複数の前記部分領域のそれぞれの前記部分領域の中で、遠距離の点に対する前記電荷及び前記電流の作用を多極展開の形で表すグローバル多極展開と、複数の前記部分領域のそれぞれの前記部分領域の中の点における前記電荷及び前記電流の作用を多極展開の形で表すローカル多極展開とを行い、

b) 複数の前記部分領域の前記グローバル多極展開と前記ローカル多極展開との重畳により前記物体の前記電磁場を求めることを特徴とする物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項2】 所与の小さい誤差尺度まで、物体の電磁場を求める以下に記載のステップを反復実行し、初期条件として $I=0$ が成立し、すなわち、

a) $c\mathbf{g}=G\mathbf{I}$ によりグローバル多極係数を用いてグローバル多極展開を計算するステップを実行し、なお、 $c\mathbf{g}$ は複数の部分領域のグローバル多極係数を有するベクトルであり、 \mathbf{I} は所与の電流分布を表すベクトルであり、 G は所与の前記電流分布 \mathbf{I} における複数の前記部分領域の1つの当該の前記部分領域の中のグローバル多極係数を定めるマトリクスであり、

b) $c^1=T\mathbf{c}\mathbf{g}$ によりローカル多極係数を用いてローカル多極展開を計算するステップを実行し、なお、 c^1 は複数の前記部分領域の前記ローカル多極係数を有するベクトルであり、 T は前記グローバル多極を組合せてローカル多極を形成するのに用いる移動マトリクスであり、

c) $Z\mathbf{I}=Z'+L\mathbf{c}^1$ から電磁場を求めるステップを実行し、なお、 Z はインピーダンスマトリクスであり、 Z' は前記部分領域と前記部分領域との間の結合を表すインピーダンスマトリクス Z の一部であり、 L はローカル多極係数を評価するマトリクスであることを特徴とする請求項1に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項3】 部分領域が同一の大きさであることを特徴とする請求項1又は2に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項4】 部分領域の寸法を、観察者領域からの距離に比例して形成することを特徴とする請求項1又は請求項2に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項5】 複数の部分領域の1つの当該の前記部分領域をそれぞれ、均一な物理的特性を有するそれぞれ1つのゾーンに割当ててことを特徴とする請求項1から請求項4のうちのいずれか1つの請求項に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項6】 細分化ステップにおいて複数の部分領域

の1つの当該の部分領域を、8つまでのゾーンに分割することを特徴とする請求項1から請求項5のうちのいずれか1つの請求項に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項7】 物体の部分領域の構成部分でありインピーダンスを有するエレメントを直接マトリクス Z' の中でインピーダンスとして考慮することを特徴とする請求項2から請求項6のうちのいずれか1つの請求項に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項8】 電磁場を所与の周波数に対して求めることを特徴とする請求項1から請求項7のうちのいずれか1つの請求項に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項9】 所与の周波数を最小周波数ないし最大周波数により定め、物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法を、前記最小周波数から開始して前記最大周波数まで所与のステップ幅で継続してその都度電磁場を求めることを特徴とする請求項8に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項10】 所与の周波数を最小周波数ないし最大周波数により定め、物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法を、前記最小周波数から開始して前記最大周波数まで所与のステップ幅で継続してその都度電磁場を求めることを特徴とする請求項8に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項11】 所与の周波数を最小周波数ないし最大周波数により定め、物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法を、前記最小周波数と前記最大周波数との間の周波数から開始して前記最大周波数まで又は前記最小周波数まで所与のステップ幅で継続してその都度電磁場を求めることを特徴とする請求項8に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項12】 グローバル多極展開を基底関数に従ってではなくエレメント毎に実行することにより低い周波数における安定性を保証することを特徴とする請求項1から請求項11のうちのいずれか1つの請求項に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【請求項13】 物体の電磁環境両立性 (EMC) を求めることを特徴とする請求項1から請求項12のうちのいずれか1つの請求項に記載の物体の電磁場を求めるコンピュータ支援シミュレーション方法。

【発明の詳細な説明】

【0001】

【発明の属する技術分野】 本発明は、複数の部分領域を含み複数の電荷及び複数の電流を含む物体の電磁場を求

めるコンピュータ支援シミュレーション方法に関する。

【0002】

【従来の技術】DIN規格VDE0870から電気装置の“電磁環境両立性”(EMC=electromagnetic compatibility)は、この装置の電磁的周囲の中で、その他の装置も所属するこの周囲に許容されないように影響を及ぼすことなく機能を十分に発揮する“電気装置の能力”として公知である。CG法(conjugate gradient method)すなわち共役傾斜法のクラスに所属するGMRES法と称されるアルゴリズムがYoucef Saas及びMartin H. S chultz著“GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems”(SIAM J. Sci. Stat. Comp.誌、第7巻、第3号、第856～869頁、1986年7月)から公知である。

【0003】以下においてFMM(fast multipole method)と呼称される高速多極法は例えばV. Rokhlinの論文“Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory.”(Journal of Computational Physics、第60巻、第187頁～第207頁、1985年)から公知である。この形式論における1つの重大な欠点は多極係数が明示的に計算されず、これにより障害歪が発生することがあり、これにより多極展開の中に誤差が発生することがあることにある。

【0004】

【発明が解決しようとする課題】本発明の課題は、物体の電磁場をコンピュータにより求め、これにより既に物体を実現する前に物体の電磁環境両立性(以下EMCと称する)を保証することを可能にし、これにより、測定及び事後改善から成る最適化サイクルを回避し、前述の欠点を除去することにある。

【0005】

【課題を解決するための手段】上記課題は本発明により請求項1の特徴部分に記載の特徴により、複数の部分領域のそれぞれの部分領域の中で、遠距離の点に対する電荷及び電流の作用を多極展開の形で表すグローバル多極展開と、複数の部分領域のそれぞれの部分領域の中の点における電荷及び電流の作用を多極展開の形で表すローカル多極展開とを行い、複数の部分領域のグローバル多極展開とローカル多極展開との重畳により物体の電磁場を求めることにより解決される。

【0006】コンピュータ支援シミュレーション方法で複数の部分領域を含み複数の電荷及び複数の電流を含む物体の電磁場が求められる。このために部分領域の中でグローバル多極展開とローカル多極展開が実行され、グローバル多極展開は遠距離の点に対する電荷及び電流の作用を多極展開の形で表し、同様にローカル多極展開は複数の部分領域の中の点における電荷及び電流の作用を多極展開の形で表す。グローバル多極係数はグローバル多極展開のパラメータとして計算され、ローカル多極展開はローカル多極展開のパラメータとして計算される。

最後に物体の電磁場がグローバル多極展開とローカル多極展開とから求められる。

【0007】数値的方法によるEMCのために規定されている必要な測定のシミュレーションにより製品コンポーネントの最適化が容易になる。シミュレーションされる測定がすべての場所で可能である測定及び事後改善の繰返しのプロセスと、これに伴うコスト及び時間は本発明の方法により大幅に低減されることが可能である。

【0008】この提案される方法は特に、モデルの幾何学的構造とひいては部分領域の寸法とが波長に比して小さい散乱問題のシミュレーションに適する。このような前提の下に干渉作用は制限されており、従って既に僅かな数の多極係数でポテンシャル又は場の強さを表すのに充分である。前述の安定化法により本発明の方法は低い周波数においても安定である。

【0009】本発明の第1の有利な実施の形態では物体を少なくとも1つの別の部分領域に分割する。これにより物体は部分領域から成る。

【0010】別の1つの有利な実施の形態では反復的に初期条件 $I=0$ で、十分に小さい誤差尺度を提供する打ち切り条件まで、物体の電磁場を求める次のステップを実行する。すなわち、

a) $c\mathbf{g}=G\mathbf{I}$ によりグローバル多極係数を有するグローバル多極展開を計算するステップを実行し、なお、 $c\mathbf{g}$ は複数の部分領域のグローバル多極係数を有するベクトルであり、 \mathbf{I} は所与の電流分布を表すベクトルであり、 G は所与の電流分布 \mathbf{I} における複数の部分領域の1つの当該の部分領域の中のグローバル多極係数を定めるマトリクスであり、

b) $c^1=Tc\mathbf{g}$ によりローカル多極係数を有するローカル多極展開を計算するステップを実行し、なお、 c^1 は複数の部分領域のローカル多極係数を有するベクトルであり、 T はグローバル多極を組合せてローカル多極を形成するのに用いる変換マトリクスであり、

c) $Z\mathbf{I}=Z'+Lc^1$ から電磁場を求めるステップを実行し、なお、 Z はインピーダンスマトリクスであり、 Z' は部分領域と部分領域との間の結合を表すインピーダンスマトリクス Z の一部であり、 L はローカル多極係数を評価するマトリクスである。

【0011】次の1つの有利な実施の形態では、同一の大きさの部分領域を選択する。

【0012】別の1つの有利な実施の形態では、部分領域の大きさを、観察者領域からの距離に比例して選択する。

【0013】また別の1つの有利な実施の形態ではそれぞれ1つの部分領域を、均一な物理的特性を有するそれぞれ1つのゾーンに割当てて。このゾーンは、同一の電磁的特性例えば同一の電荷分布等を有する大きい面であることもある。

【0014】別の1つの有利な実施の形態では調査しよ

うとする物体のインピーダンスを有する構成部分を直接的にマトリクス Z' の中でインピーダンスとして考慮する。

【0015】更に電磁場を所与の周波数に対して求めることができる。

【0016】1つの付加的な有利な実施の形態では所与の周波数を、最小の調査する周波数から最大の調査する周波数まで継続して所与のステップ幅で選択して、その都度に電磁場を求める。この場合に最小の調査する周波数から開始して最大の調査する周波数まで継続して行うか、逆の方向で行うことも可能である。付加的に最小の調査する周波数と最大の調査する周波数との間の周波数から開始することも可能であり、その際、最小の周波数又は最大の周波数まで、電磁場を求める方法は継続される。

【0017】1つの付加的な有利な実施の形態は低い周波数における本発明の方法の安定性を、グローバル多極展開を基底関数に従ってではなくエレメント毎に実行することにより保証する。

【0018】別の1つの有利な実施の形態では本発明の方法を物体の電磁環境両立性(EMC)を求めるために使用する。

【0019】本発明の有利な実施の形態は従属項にも記載されている。

【0020】本発明の有利な実施の形態が添付図面を用いて以下において詳細に説明される。

【0021】

【実施の形態】遅延ポテンシャル

当業者には自明なように微分の形のマックスウェル方程式から出発する

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0 \quad (1a)$$

$$\nabla \times E = -i\omega\mu_0 H \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (1c)$$

$$\nabla \times H = J + i\omega\epsilon_0 E \quad (1d)$$

ただし、 ∇ はナブラ演算子、 H は磁場強度、 E は電場強度、 ρ は空間電荷密度、 ϵ_0 は真空の誘電率、 i は虚数の*

$$(1/r^2) (\partial r^2 / \partial r) (\partial \Psi / \partial r) + k^2 \Psi = 0 \quad (8)$$

式(8)において次の置換を行う。

【0027】

$$\Psi = r\psi$$

すると次式(9)の定数の係数を有する常微分方程式が得られる。

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 \quad (9)$$

式(9)の一般解は次式(10)又は(11)により表される。

$$\psi = C_1 e^{-ikr} + C_2 e^{ikr} \quad (10)$$

*単位($\sqrt{-1}$)、 ω は角周波数、 μ_0 は真空の透磁率、 J は体積電流密度を示す。

【0022】連続の方程式が直接的にマックスウェル方程式から、式(1a)と式(1d)の発散とを組合せることにより次式(2)のように得られる

$$\nabla \cdot J = -i\omega\rho \quad (2)$$

ポテンシャルが次式(3a)及び(3b)により表されたとすると、

$$E = -i\omega A - \nabla\phi \quad (3a)$$

$$H = (1/\mu_0) \nabla \times A \quad (3b)$$

この場合、次式(4)により表されるローレンツ条件を考慮すると2つの微分方程式(5a)及び(5b)が得られる

$$\nabla \cdot A + i\omega\epsilon_0\mu_0\phi = 0 \quad (4)$$

$$(\nabla^2 + k^2) A = -\mu_0 J \quad (5a)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (5b)$$

ただし k は次式(6)により表される波数である

$$k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda \quad (6)$$

ただし、 A は磁気ベクトルポテンシャル、 ϕ は電気スカラーポテンシャル、 c_0 は真空中の光速、 λ は波長を示す。

【0023】スカラー電気ポテンシャル ϕ も磁気ベクトルポテンシャル A の3つの直交座標成分も、一般的に次式(7)により表されるヘルムホルツ方程式と呼称される同一のタイプの微分方程式により表される。

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(r) = f(r) \quad (7)$$

ただし、 Ψ は基底関数、 r は位置ベクトル、 $f()$ は1つの変数を有する関数を示す。

【0025】ヘルムホルツ方程式の解が、右辺のディラック関数励起に対して既知である場合、所与の関数 $f(r)$ の完全解を重畳により求めることが可能である。対称性の理由から、原点におけるディラック関数励起により球対称な解、関数 Ψ が得られ、従って式(7)は球座標において、 r の関数である次式(8)により表される微分方程式に帰せられる。

【0026】

※【数1】

※

【0028】

$$\Psi = C_1 e^{-ikr}/r + C_2 e^{ikr}/r \quad (11)$$

式(11)の第1項は、出射波を表し、第2項は入射波を表す。後者は物理的理由から除外されるので、更なる処理は、定数 C_1 を求めることに帰する。定数 C_1 は電気*

*スカラーポテンシャル ϕ において一般解を、原点に位置する電荷エレメント ρdV の静電ポテンシャル($k \rightarrow 0$)と比較することにより次式(12)として得られる。

【0029】

【数2】

$$C_1^{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho dV \quad (12)$$

同様に原点に位置する電流エレメント $J dV$ の磁気ベクトルポテンシャルに対する定数は次式(13)で得られる。

$$C_2^{mag} = \frac{\mu_0}{4\pi} J dV \quad (13)$$

全ソース領域 G にわたる積分により方程式(5a)及び(5b)の解が最終的に次式(14a)及び(14b)のように得られる。

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_G J(x') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \quad (14a)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_G \rho(x') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \quad (14b)$$

【0030】ただし、 $R = \|r - r'\|$ ただし、 R は観察点 r とソース点 r' との間の距離、 G は体積領域、 A 、 ϕ は遅延ポテンシャルを示す。

【0031】場の強さの計算

式(14a)を式(3a)に代入し、式(14b)を式※

※(3b)に代入することにより電場の強さ及び磁場の強さが、次式(15a)及び(15b)のように求められる

【0032】

【数3】

$$E(x) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_G J(x') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_G \rho(x') \nabla \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \quad (15a)$$

$$B(x) = \frac{1}{4\pi} \iiint_G \nabla \frac{e^{-ikR}}{R} \times J(x') dV' \quad (15b)$$

【0033】従って球座標を使用して次式(16)が得☆ ☆られる

$$\nabla (e^{-ikR}/R) = -e^{-ikR} (1/R^3 + ik/R^2) R \quad (16)$$

所与のソースに対する電場の強さ及び磁場の強さを求めるための積分式は、次式(17a)及び(17b)で与えられる

【0034】

【数4】

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iiint_G \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ikR}}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_G \rho(\mathbf{r}') e^{-ikR} \left(\frac{1}{R^3} + \frac{ik}{R^2} \right) \mathbf{R} dV' \quad (17a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_G e^{-ikR} \left(\frac{1}{R^3} + \frac{ik}{R^2} \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R} dV' \quad (17b)$$

【0035】式(17b)を時間調和の場合に対する、ビオサバルの法則の拡張と解釈することが可能である。

【0036】外部磁場の中の完全導体
完全導体が外部入射場 E^i , H^i の中に置かれると、完全導体の表面 S に電流分布 K 及び電荷分布 σ が形成され、導体の内部に場が存在しない(図2参照)。誘起されたソース K , σ により発生される場を、散乱場 E^S , H^S とする。散乱場は式(17a)及び(17b)を用いて計算され、入射場 E^i , H^i と重畳される。次式(18)及び(19)により表される全体の場

$$E = E^i + H^S \quad (18)$$

$$H = H^i + H^S \quad (19)$$

は、完全導体の内部において消失しているので、導体表面 S^- の内側における境界条件は次式(20a)及び(20b)により表される。

【0037】

$$r \in S^- \text{ に対して、} E_{\tan} = 0 \quad (20a) \quad *$$

$$S = \bigcup_k S_k$$

【0042】この場合に散乱場 E^S , H^S は、個々の導体から出発するすべての部分場からなり、式(20a), (20b), (21a)及び(21b)により表される境界条件はすべての導体表面に対して満たされる。

【0043】この場合に、散乱問題の課題は、所与の入射場 E^i , H^i に対して境界条件(20a, b), (21a, b)を満たしように、導体表面における電流分布 K 及び電荷分布 σ を求めることにある。

【0044】以下において“電流分布”という表現は、電荷分布については明示的には言及しないが、結合されている電流分布及び電荷分布を表す用語として使用する。電荷分布は何時でも式(22)から導出可能であり、従って“電流分布”という表現に内包することができる。

【0045】完全導体の外部の場に対しては次のような典型的な一意性の定理を適用することが可能である。

【0046】閉じた体積領域 G の中の場合分布は、体積領域 V の中に含まれているソースと、体積領域 G の境界における E_{\tan} 又は H_{\tan} の振る舞いにより一意に特定さ

$$10 * r \in S^- \text{ に対して、} H_{\tan} = 0 \quad (20b)$$

境界面を通過する際に H_{\tan} は不連続の挙動をする。従って導体表面 S^+ の外側においては次式(21a)及び(21b)が成立つ。

【0038】

$$r \in S^+ \text{ に対して、} E_{\tan} = 0 \quad (21a)$$

$$r \in S^+ \text{ に対して、} H_{\tan} = K \times n \quad (21b)$$

この場合に表面電流密度 K は、表面電荷密度 σ に次式(22)により表される2次元の連続方程式を介して関連付けられている。

$$20 \quad \nabla_S \cdot K = -i\omega\sigma \quad (22)$$

$\nabla_S \cdot K$ の表現は、境界面 S における表面電流密度 K の2次元発散を表す。

【0040】複数の完全導体が入射場の中にある場合には、境界面 S は次式(23)により表されるように異なる部分面 S_k から成る。

【0041】

【数5】

$$(23)$$

30 れる。

【0047】取り扱う散乱問題の一意性に関しては、方程式(20a, b)及び(21a, b)の境界条件のうちの1つを満足するだけで充分である。

【0048】式(18)と式(20a)とを組み合わせて E_{\tan} を求めると次式(24)が得られる。

【0049】

$$r \in S \text{ に対して、} -n \times E^S = n \times E^i \quad (24)$$

E_{\tan} は境界面を通過する際には連続であるので、この場合に、関係式が導体表面の外側 S^+ で評価されるか、又は導体表面の内側 S^- で評価されるかは重要でない。散乱場 E^S は式(17a)により求めることが可能である。更に表面電荷密度 σ が連続方程式(22)を使用して表面電流密度 K により表される場合、電場に対する積分方程式が積分微分形で次式(25)で与えられる。

【0050】 $r \in S$ に対して、

【0051】

【数6】

$$\mathbf{n} \times \iint_S \frac{e^{-ikR}}{4\pi} \left[\frac{i\omega\mu_0 \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{R} + \frac{\nabla_{\mathbf{S}'} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}')}{i\omega\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^3} + \frac{ik}{R^2} \right) \mathbf{R} \right] d\mathbf{a}' = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (25)$$

【0052】式(19)を、式(20b)または式(21b)と組み合わせて、接線方向磁場の強さ H_{tan} を評価すると、次式(26a)及び(26b)により表される関係式が得られる。

【0053】

$$r \in S^- \text{ に対して、 } -\mathbf{n} \times \mathbf{H}S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (26a)$$

$$r \in S^+ \text{ に対して、 } \mathbf{K} - \mathbf{n} \times \mathbf{H}S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (26b)$$

式(24)の場合と異なり、この場合には、面 S のいずれの側に観察者点 r が位置するかを考慮する必要があ

*る。これとは独立な積分方程式を得るために、表面 S を通過する際の H_{tan} の不連続の挙動をより詳細に観察しなければならない。

【0054】以上により、滑らかな表面を有する完全導体に対する磁場積分方程式が次式(27)により得られる。

【0055】 $r \in S$ に対して

【0056】

【数7】

$$\frac{1}{2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) - \mathbf{n} \times \iint_S \frac{e^{-ikR}}{4\pi} \left(\frac{1}{R^3} + \frac{ik}{R^2} \right) \mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R} d\mathbf{a}' = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (27)$$

【0057】磁場積分方程式(27)を適用することは、一般的に滑らかな表面及び大きい曲率半径を有する導体に制限されるので、本発明では今後は電場積分方程式を基本として用いる。その際に直接方程式(25)を利用するのではなく、方程式(25)を僅かに変更した※

20※形の次式(28)を使用する。

【0058】 $r \in S$ に対して

【0059】

【数8】

$$\mathbf{n} \times \left[\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} \mathbf{K}(\mathbf{r}') d\mathbf{a}' - \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \nabla \iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} \nabla_{\mathbf{S}'} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}') d\mathbf{a}' \right] = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (28)$$

【0060】従って境界条件(20a, b), (21a, b)を満たす4つのマクスウェル方程式の解くことは、積分方程式(28)を解析することに帰せられる。この場合に求められる解の関数は、問題とする導体の表面における電流分布 $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ である。

30☆【0061】ベクトル基底関数

連続方程式(22)を考慮すると、電流分布 \mathbf{K} , σ に対して次式(29a)及び(29b)が得られる。

【0062】

【数9】

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \tilde{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}) \quad (29a)$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{1}{i\omega} \sum_{n=1}^N \alpha_n \nabla_{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}) \quad (29b)$$

ただし、

$\tilde{\mathbf{v}}$ はベクトル基底関数、

$\nabla_{\mathbf{S}}$ は表面 S における2次元ナブラ演算子、

α_n はモーメント(スカラー係数)、

N は基底関数の数、

n は索引度数を示す。

【0063】三角形エレメントへのベクトル基底関数の使用はSadasiva M. Roai, Donald R. Wilton, Allen W.

Glissonの論文” Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape” (IEEE Trans. Antennas Pro

pagat., 第30巻, 第3号, 第409頁~第418頁, 1992年5月) から公知である。Ning Yan Zhu, Friedrich M. Landstoferの論文"Application of Curved Parametric Triangular and Quadrilateral Edge Elements in the Moment Method Solution of EFIE" (IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 第3巻, 第9号, 第319頁~第321頁, 1993年9月) はパラメータエレメントに対するベクトル基底関数 (vector basis function) が示されている。この中には、線形表面電流分布を用いて、部分毎に一定の電荷分布を得るという考え方が含まれている。一次のベクトル基底関数は2つの互いに隣接する表面エレメントにわたり延在するので、1つの円柱エレメント当り2つまでの基底関数が共働し、1つの三角形エレメント当り3つまでの基底関数が共働し、1つの矩形エレメント当り4つの基底関数が共働する。従って基底関数を表面エレメントに割当ててするための1つの規則は次のようになる。

【0064】1つの離散化グリッドのそれぞれの内側エッジにそれぞれ1つの基底関数が対応し、従って結果の*

$$\int_{C_m} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

【0072】ただし曲線 C_m は第 m のエレメント対に関連し、このエレメント対はエレメント S_{m1} と S_{m2} とから成り、直線的に第1のエレメントの重心 $r_{C_{m1}}$ から共通の辺の中点へ通り、次いで更に第2のエレメントの重心 $r_{C_{m2}}$ を直線的に通る (図3を参照)。

【0073】線重み付け法の考え方はスカラーポテンシャル ϕ の勾配形成を線積分により離散ポテンシャル差に移行することから成る。出発点は電場積分方程式 (28) ※30

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{a}' \quad (32a)$$

$$\varphi = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0 4\pi} \iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} \nabla_S' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{a}' \quad (32b)$$

式 (31) の両辺がベクトルの M 曲線 C_m にわたり重み付けされると次式 (33) が得られる。

$$\int_{C_m} (i\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_m} \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit } m=1, 2, \dots, M \quad (33)$$

ただし $m=1, 2, \dots, M$ である。

【0076】この場合に $\nabla\phi$ に関して行われる積分を双方の終点の間のポテンシャル差により置換することが可能である。更に E^i 及び A が第1近似において1つの表面エレメントの中で一定と見なされる場合、三角形エレ

* 方程式系の1つの自由度が対応する。

【0065】一次のベクトル基底関数は通常は次の特性を有する

a) 生ずる表面電流密度 K は連続である。

【0066】b) 生ずる表面電荷密度 σ は部分区間毎に一定である。

【0067】c) 基底関数の定義領域の境界において $K_{\perp} = 0$

d) それぞれの基底関数は個別に連続方程式 (22) を満足する。

【0068】e) 0次の基底関数において不可避に発生する特異電荷は発生しない。

【0069】f) それぞれの基底関数を遠距離の位置にある場合にはヘルツ双極子と見なすことができる。

【0070】線重み付け法

線重み付け法においては境界条件 $E_{\tan} = 0$ は次式 (30) により表される線積分の形で表される。

【0071】

【数10】

(30)

※である。

【0074】 $r \in S$ に対して

$(i\omega A + \nabla\phi)_{\tan} = E_{\tan}^i$

ただし、 A は次式 (32a) により表されるポテンシャル、 ϕ は次式 (32b) により表されるポテンシャルである。

【0075】

【数11】

メントに対して次式 (34) が得られる。

【0077】

【数12】

$$i\omega \left[\Delta(x_{m1}^c) \frac{q_{m1}^c}{2} - \Delta(x_{m2}^c) \frac{q_{m2}^c}{2} \right] + \phi(x_{m2}^c) - \phi(x_{m1}^c) = \\ = U^1(x_{m1}^c) \frac{q_{m1}^c}{2} - U^1(x_{m2}^c) \frac{q_{m2}^c}{2} \quad (34)$$

ただし $m=1, 2, \dots, M$ である。

【0078】双方の局所位置ベクトル d_{m1}^c 及び d_{m2}^c は * 式 (32a) 及び (32b) のポテンシャルにおいて式 (29a) 及び式 (29b) を使用して次式 (35a) 及び (35b) により表される関係式が得られる。

【0079】線重み付け法の1つの利点は、式 (25) の強い特異点を迂回し、これにより計算が大幅に簡単化 10 【0081】 されることにある。 【数13】

【0080】線形方程式系の形成 *

$$\Delta(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N \alpha_n \iint_{S_n} \frac{e^{-ikR}}{R} \bar{\psi}_n(x') da' \quad (35a)$$

$$\phi(x) = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0 4\pi} \sum_{n=1}^N \alpha_n \iint_{S_n} \frac{e^{-ikR}}{R} \nabla_{S'} \cdot \bar{\psi}_n(x') da' \quad (35b)$$

ただし $S_n := S_{n1} \cup S_{n2}$ である。

【0082】従って、また関係 $I_n = \alpha_n$ を考慮すると、式 (34) は次式 (36) の形のマトリクス方程式として表される。

【0083】 $Z \cdot I = U$ (36)

ただしマトリクス $Z = [Z_{mn}]$ はインピーダンスマトリクスである、何故ならば Z は電流振幅 $I = [I_n]$ を値 $U = [U_m]$ に関連しているからである。同様に逆マトリクス Z^{-1} はアドミタンスマトリクスと称される。 ※

※【0084】求めるモーメント I_n は方程式系 (36) の直接解又は反復解により求めることが可能である。

【0085】面 S_n を2つの面エレメント S_{n1} 及び S_{n2} に分割した後式 (34) からマトリクスエレメント (マトリクス要素) Z_{mn} に対して次式 (37) が得られる。

【0086】

【数14】

$$Z_{mn} = i\omega \left[(\Delta_{11} + \Delta_{21}) \frac{q_{m1}^c}{2} - (\Delta_{12} + \Delta_{22}) \frac{q_{m2}^c}{2} \right] + \\ + \phi_{12} + \phi_{22} - \phi_{11} - \phi_{21} \quad (37)$$

ただしポテンシャル A_{pq} に対しては次式 (38a) が成立ち、ポテンシャル ϕ_{pq} に対しては次式 (38b) が成立つ。

$$A_{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_{np}} \frac{e^{-ikR_q}}{R_q} \bar{\psi}_n(x') da' \quad (38a)$$

$$\phi_{pq} = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0 4\pi} \iint_{S_{np}} \frac{e^{-ikR_q}}{R_q} \nabla_{S'} \cdot \bar{\psi}_n(x') da' \quad (38b)$$

【0087】結合インピーダンスとも称されるマトリクスエレメント Z_{mn} は第 m のエレメント対への第 n のエレメント対の影響を表す。図4においてソースエレメント n と観察者エレメント m との間の結合パスが示されている。例えば A_{21} は、 S_{n2} により S_{m1} の中点に生成されたベクトルポテンシャルを示す。

【0088】インピーダンスマトリクス $[Z_{mn}]$ を計算するためのプログラム技術的アプローチは、方程式 (3

7) により個々の項 Z_{mn} を別個かつ完全に評価することにある。しかし三角形エレメントの場合には1つのエレメント当り3つまでの基底関数が関与するのでインピーダンスマトリクス $[Z_{mn}]$ の計算を段階毎に行うとよいと考えられる。このために式 (38a) 及び式 (38b) による部分結果がそれぞれ2つの三角形エレメントのために計算され、適切な係数を付加され、当該のマトリクスエレメントに加算される。

【0089】方程式系(36)の右辺は式(34)により次式(39)のように計算される。

$$v_m = E^1(z_m^c) \frac{a_m^c}{2} - E^1(z_m^c) \frac{a_m^c}{2} \quad (39)$$

【0091】伝搬ベクトルとしてkを有し偏波方向としてE₀を有する入射平面波においてEⁱは次式(40)により表される関係式を介して求めることが可能である。

【0092】 $E^i(r) = E_0 \cdot e^{-ikr}$ (40)
インピーダンスを有するエレメント

薄肉層が簡単な表面を使用してモデル化される場合、抵抗、インダクタンス又は容量を有する表面をもった非完全導体も簡単に既存の方程式系の中に取り込むことが可能である。このような導体においては、適切な境界条件であるE_{tan}=0は次式(41)となる。

【0093】 $E_{tan} = z_s \cdot K$ (41)
表皮効果に起因して表面インピーダンスz_sは一般に周波数に依存する。しかし所与の周波数において表皮深さ※

$$\int_{C_m} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_m} z_s K \cdot d\mathbf{x} \quad (43)$$

【0097】ただし式(43)の右辺の大きさを補正項の形で方程式系の中で考慮しなければならない。

【0098】図5aにおいて分布されたインピーダンスが示され、この図において表面インピーダンスz_sにより示されている表面エレメントに関するすべての重み付☆

$$\int_{C_m} z_s K \cdot d\mathbf{x} = \sum_n I_n \int_{C_m} z_s \Psi_n \cdot d\mathbf{x} \quad (44)$$

【0100】従って1つの三角形エレメント当たり通常は式(36)の中の9つまでのマトリクス成分が補正され、1つの矩形エレメント当たり通常は16までのマトリクス成分が補正されなければならない。

【0101】より簡単には、コンポネントすなわち構成素子の形の集中化されたインピーダンスを考慮することである。これは図5のbに示されている。分布されたインピーダンス(図5のa参照)と異なり、集中化された☆

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = U_m - Z_m^1 I_m \quad (45)$$

【0103】ただし式(37)の中の値Z_{mn}と式(39)の中の値U_mとは定められている。付加項を左辺に移動すると、この付加項を、次式(46)により表される補正された対角エレメント(対角要素)の形で考慮す◇

$$\bar{Z}_{mm} = Z_{mm} + Z_m^1 \quad (46)$$

【0105】集中化された電圧源
集中化されたインピーダンスの場合と同様に集中化された電圧源においても次式(47)により表されるように

* 【0090】
【数15】

※に比して薄い厚さl_dを有する層においては横断面にわたる電流分布は一定と仮定されることが可能である。例えばこれにより、抵抗を有する金属層の表面インピーダンスz_sを低い周波数において近似的に次式(42)により表される関係式により計算することが可能である。

【0094】 $z_s \approx r_{sp} / l_d$ (42)

ただしr_{sp}は使用金属の固有抵抗を示す。

【0095】新しい境界条件(式(41)を参照)により式(30)の重み付け積分も次式(43)に変化する。

【0096】
【数16】

☆積分が影響される。補正項(すなわち式(43)の右辺)に対して次式(44)が成立つ。

【0099】
【数17】

☆インピーダンスを、インピーダンスを有するただ1つのエッジにより示すことが可能である。ただ1つの重み付け積分と、ひいては方程式系(36)の中のただ1つの行とが影響を受ける。インピーダンスz_{l_m}を有する第mのエッジに対して次式(45)が得られる。

【0102】
【数18】

40◇ることが可能である。

【0104】
【数19】

方程式系(36)のただ1つの行が影響を受ける。

【0106】
【数20】

$$\sum_{n=1}^N z_{mn} I_n = U_m - U_m^1 \quad (47)$$

付加的な電圧源 U_m^1 をそのままの形で方程式系 (36) の右辺に入入れることが可能であり、これにより次式 (48) により表される関係式が得られる。

$$\bar{U}_m = U_m - U_m^1 \quad (48)$$

【0107】対称性の考慮

配置が対称的である場合には、方程式系 (36) を解くタスクを大幅に低減することが可能である。鏡対称の配置と対称励起 U_m の場合には自由度の数を $1/2$ に低減することが可能である。これに対して非対称励起の場合には励起ベクトルを対称的な部分と非対称的な部分とに分割することが可能である。

【0108】この提案された方法により完全導体の半分の面も考慮することが可能である。

【0109】EMCシミュレーションの分野でこのような知見を用いて例えば測定室の中の金属床を、自由度の数を増加することなく考慮することが可能である。

【0110】積分の数値的評価

$$\iint_S d \frac{e^{-ikR}}{R} da'$$

$$\iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} da'$$

【0113】これらの積分は $R=0$ 又は $r=r'$ において弱い特異点を有し、この弱い特異点を取出して解析的に積分することが可能である。この場合、積分が行われるエレメント表面は全く一般的に S として示されている。

10 * インピーダンスマトリクスを計算するために式 (38 a) 及び (38 b) の積分を適切に評価することが必要である。ソース点及び観測者点が十分に相互に離れている場合には積分を数値的積分公式だけを用いて評価するだけで充分である。しかし、ソース点と観測者点とが互いに近くに位置する場合には被積分関数の特異点に起因する問題が発生し、従ってこのために特別の解析的方法が使用される。

【0111】式 (38 a) 及び (38 b) の中に次式 (49 a) 及び (49 b) により表されるタイプの積分が存在する。

【0112】

【数21】

(49a)

(49b)

【0114】式 (49 a) の積分においていくつかの変形の後次式 (50 a) が得られる。

【0115】

【数22】

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} da' &= \underbrace{\iint_S (\tilde{r}' - \tilde{r}) \frac{e^{-ikR} - 1}{R} da'}_{IG_1} \\
&+ (\tilde{r} - \tilde{r}^f) \cdot \underbrace{\iint_S \frac{e^{-ikR} - 1}{R} da'}_{IG_2} \\
&+ \underbrace{\iint_S \frac{\tilde{r}' - \tilde{r}}{R} da'}_{IG_3} \\
&+ (\tilde{r} - \tilde{r}^f) \cdot \underbrace{\iint_S \frac{1}{R} da'}_{IG_4} \quad (50a)
\end{aligned}$$

ただし、 \tilde{r}^f はそれぞれのエレメント（有利には三角形）の自由なコーナ、 \tilde{r} は（ティルダにより示されているように）三角形平面の中に投影されたベクトルを示す。ただし \tilde{r}^f は、式（50a）においては \tilde{r} で示されている。

式（49b）の積分において同様に変形された次式（50b）が得られる。

$$\iint_S \frac{e^{-ikR}}{R} da' = \underbrace{\iint_S \frac{e^{-ikR} - 1}{R} da'}_{IG_2} + \underbrace{\iint_S \frac{1}{R} da'}_{IG_4} \quad (50b)$$

【0116】特異積分 IG_3 及び IG_4 を解析的に評価することが可能である。積分 IG_1 及び IG_2 を評価するために数値積分公式が使用される、何故ならば被積分関数はエレメント表面全体の中で連続的であり制限されているからである。

*【0117】 $R \rightarrow 0$ における極限值として IG_2 の被積分関数においてド・ロピタルの公式により次式（51）が得られる。

【0118】

*30 【数23】

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{e^{-ikR} - 1}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{-ik \cdot e^{-ikR}}{1} = -ik \quad (51)$$

同様に IG_1 の被積分関数において次式（52）が得られる。

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[(\tilde{r}' - \tilde{r}) \frac{e^{-ikR} - 1}{R} \right] = 0 \quad (52)$$

【0119】共役傾斜法

得られる方程式系（36）を直接解法により解く方法の外に、効率の理由から反復解アルゴリズムが推奨される。式（36）からの解くべき線形方程式系は一般的に次式（53）により表される。

【0120】 $Ax = b$ （53）

ただし $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ である。ただし \mathbb{C} は複素数の集合を示す。反復解法の特徴は、近似解 $x^{(m)}$ の生成された列であり、 $x^{(m)}$ は反復関数と称される。この列が m の増加と共に収束する場合には反復プロセスを、所望の精度に到達した後に打切ることが可能である。

【0121】直接解法が、正確に定められた計算コストを有するのに対して反復解法におけるコストは直接的に

所要反復ステップの数に依存し、従って大部分の場合には前もって既知ではない。

40 【0122】方程式系を解くために直接解法は、個々のマトリクスエレメントへの直接的なアクセスを必要とする。これに対して反復解法においてはマトリクス A は有利にはマトリクス・ベクトル積の形でのみ現れ、従って明示的に与える必要はない。マトリクス・ベクトル積を計算するためには当該の関数へのアクセスだけでよい。反復法に依存して1つの反復ステップ当たり1つ以上のマトリクス・ベクトル積が計算され、従って、空の全く無いマトリクスの場合にはこのために通常は $O(N^2)$ 浮動小数点演算が必要とされる。反復法を使用する際に重要な点は従って、所要の反復ステップの数をできるだけ

50

小さく保持することにある。

【0123】CG法すなわち共役傾斜法のクラスには、Youcef Saas及びMartin H. Schultz著“GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems”(SIAM J. Sci. Stat. Comp. 誌、第7巻、第3号、第856頁～第869頁、1986年7月)から公知のGMRES法も含まれる。この方法の基礎となるアルゴリズムは、得られる解空間の完全なQR分解を基礎とし、従って非常にロバストである。本説明ではGMRES法をCG法の代表として使用しているが、本発明はこの方法の使用に制限されない。

【0124】反復プロセスの間の解品質を判断できるようにするために、式(53)から出発して次式(54)により表される剰余 $r^{(m)}$ が反復関数 $x^{(m)}$ のための誤差尺度として導入される。

$$\begin{aligned} \text{【0125】 } r^{(m)} &= b - Ax^{(m)} \quad (54) \\ \|r^{(m)}\| / \|r^{(0)}\| &= \|r^{(m)}\| / \|b\| < \varepsilon \quad (57) \end{aligned}$$

原理的には打ち切り規準は、反復の打ち切りによる誤差が離散化誤差より僅かに小さいままであるように選択されなければならない。

【0129】打ち切り規準に到達するまでに必要な反復ステップの全数はMにより示され、ただし $m=1, 2, \dots, M$ である。

【0130】プリコンディショニング
大部分の問題において反復プロセスの収斂の作用はいわ※

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \Leftrightarrow \hat{A}x = \hat{b} \quad \text{ただし } \hat{A} = M^{-1}A, \hat{b} = M^{-1}b \quad (58)$$

以下の記述で \hat{A} , \hat{b} , \hat{x} は式中ではそれぞれ \hat{A} , \hat{b} , \hat{x} を示すものとする。

【0133】マトリクス M^{-1} はプリコンディショナと称される。 $M=A$ の場合に例えば \hat{A} のすべての固有値が1であり、従って正確な解はただ1回の反復の後に既に得られる。しかし、 M^{-1} の計算のコストは、このようなプリコンディショニングにおいては、方程式系の直接解におけるのと正確に同一の大きさである。また原理的には、マトリクス A とマトリクス M とが相似であればプリコンディショニングの効果も益々良くなる。

【0134】式(58)を使用する場合に値 \hat{b} は反復プロセスの開始時にまず初めに簡単なマトリクス・ベクトル積を用いて求められなければならない。マトリクス \hat{A} は効率の理由から有利には明示的には計算されない。すべてのマトリクスはCG法においてはマトリクス☆

$$AM^{-1}Ax = b \Leftrightarrow \hat{A}\hat{x} = \hat{b} \quad \text{ただし } \hat{A} = AM^{-1}, \hat{x} = Mx \quad (59)$$

【0137】式(59)を使用する場合、求める解 x を実際の反復プロセスの後に付加的なマトリクス・ベクトル積 $x = M^{-1}\hat{x}$ を用いて計算しなければならない。

【0138】反復プロセスの収斂の作用は \hat{A} の固有値

*次式(55)により表される実際の誤差 $e^{(m)}$ は、正確な解 x が欠如することに起因して通常は既知でない。

$$\text{【0126】 } e^{(m)} = x - x^{(m)} \quad (55)$$

剰余 $r^{(m)}$ は右辺の誤差である、すなわちモーメント法の場合には第 m の反復ステップの後での境界条件を満足する精度である。式(55)を式(54)の中に代入し、式(53)を考慮すると次式(56)により表される関係式が得られる。

$$\text{【0127】 } r^{(m)} = Ae^{(m)} \quad (56)$$

10 反復プロセスのための打ち切り規準として有利には、剰余ノルム $\|r^{(m)}\|$ が所定の係数 ε 例えば 10^{-4} だけ低減されていることが要求される。従って、反復プロセスが初期値としての零ベクトルにより開始される場合には反復を次式(57)により表される不等式が満足されると直ちに打切ることが可能である。

$$\text{【0128】}$$

※ゆるプリコンディショニングにより加速可能である。

【0131】右側のプリコンディショニングと左側のプリコンディショニングとを区別することが可能である。
20 式(53)から、左変換された方程式系に対して次式(58)が得られる。

$$\text{【0132】}$$

$$\text{【数24】}$$

☆・ベクトル積の形でのみ現れるため、このような演算をシーケンス的に、すなわち2つの別個のマトリクス・ベクトル積の形で評価するとより好適である。更に逆マトリクス M^{-1} の代りに、 M の適切な積の形への分解を計算するだけで充分である。しかしこの場合には当該のマトリクス・ベクトル積は、適切な逆置換ルーチンにより置換されなければならない。

【0135】左側のプリコンディショニングと同様に右側のプリコンディショニングが次式(59)のように行われる。

$$\text{【0136】}$$

$$\text{【数25】}$$

の分布により求められるのでプリコンディショニングの双方の変形は収斂の作用に関して同等である。しかし、左変換に比して右のプリコンディショニングは、式(54)の剰余を誤差の尺度としてそのままの形で採用する

ことが可能である利点を有する。左のプリコンディショニングの場合には式(54)の剰余は大部分の場合には付加コスト無しには求めることができない。この場合には有利には、式(54)において求められた剰余の代*

$$\hat{z}^{(m)} = \hat{b} - \hat{A} x^{(m)} = r^{-1} r^{(m)}$$

【0140】この場合にはマトリクス M^{-1} により歪みが発生し、これらの歪みは打ち切り規準に望ましくない影響を与えることもある。

【0141】ヤコビプリコンディショニング
1つの可能なプリコンディショニングは次式(61)により表される対角マトリクスから成る。

【0142】 $i=j$ の場合には $M_{ij}=A_{ij}$
その他の場合には $M_{ij}=0$ (61)
このいわゆる左又は右のヤコビプリコンディショニングの使用は、 A の対角スケーリングに相当し、このスケーリングにおいては対角エレメントは行毎又は列毎に方程式系を乗算することによって1にされる。

【0143】1つの更なる有利なプリコンディショニングはヤコビプリコンディショニングのブロック変形である。この場合に自由度のインデックス集合
 $F = \{1, 2, \dots, N\}$
がまず初めに

【0144】

【数27】

$$F = \bigcup_w F_w$$

【0145】により対毎に互いに素である部分集合 F_w に分割される。これらの部分集合の数を W により示す。次いでマトリクス M は次式(62)により与えられる。

【0146】 $i, j \in F_w$ の場合には $M_{ij}=A_{ij}$
その他の場合には $M_{ij}=0$ (62)
このようなブロック化ヤコビプリコンディショニングにおいてはマトリクス M 及び M^{-1} はブロック化対角マトリクスである。マトリクス・ベクトル積 $M^{-1}x$ の計算を個々の対角ブロックの個別の積の形への分解を用いて効率的に実現することが可能である。

【0147】1つの特に良好な収斂の作用は、インデックス集合 F_w を物理的な部分領域に割当てることが可能である場合に得られる。このような部分領域の形成は最も簡単な場合すなわち立方体の場合には、調べる物体をツリー状構造の形にステップ毎にサブ分割することにより可能である。それぞれの細分化ステップにおいて、既に生成された立方体は有利には、1辺の長さの $1/2$ を有する8つまでの子立方体に分割される。空の領域は通常は無視される。最も粗の細分化ステップすなわちただ1つのブロックはステップ0を表わしている。これに応じてステップインデックスはそれぞれの細分化ステップにおいて1つだけ増加する。

【0148】有利には、実際の反復プロセスの前に自由

*りに次式(60)が使用される。

【0139】

【数26】

(60)

度の置換が行われ、これにより方程式系の中で得られるブロック構造がプログラム技術的に取扱い可能になる。このためにインデックスは、共通の部分領域が順次の自由度に割当てられるように配置変更される。次いでインデックス集合 F_w に割当てられている部分問題が A から抽出され、適切な積の形への分解を用いて解かれる。次いで、得られた積の形への分解はまとめられ、これによりブロック対角マトリクス M^{-1} が形成される。

【0149】図6において例えば自動車の車体の分割が細分化ステップ2、3及び4において示されている。

【0150】ヤコビプリコンディショニングの適用は、同一の大きさの物理的な部分領域に制限されない。特に、強く変化するエレメント寸法による離散化において、物体を異なる寸法の部分領域にサブ分割することが推奨される。図7には適応形ブロックヤコビプリコンディショニングが、無限に延在する地球表面上導体路の場合に対して示されている。得られた電流分布が、使用される基底関数によりできるだけ正確に再構成されるように導体ループの回りの領域は微細にネット化される。有利には部分領域はそれぞれの領域内にもはや300自由度より大きい自由度が含まれていないように選択される。

【0151】FFS法(高速周波数ステップング)

多数の物理的なEMC問題は、調べる対象物の広帯域の特徴付けを必要とする。耐障害性指針すなわち雑音余裕度ガイドラインも放射ガイドラインも広い周波数領域に及び、従って当該の測定をシミュレートするために大規模な一連の計算が行われなければならない。これらの一連の計算において周波数 f が実際の測定と同様にステップ毎に調査対象の最小の周波数 f_{\min} から調査対象の最大の周波数 f_{\max} まで高められる。クリティカルな周波数領域を見逃すことがないように、使用されるステップ幅 Δf はできるだけ小さく選択されなければならない。

【0152】反復的解法を使用する場合に計算コストを低減するためのアプローチは、調査される解ベクトルが十分に小さな周波数ステップの場合には余りにも大きく異なることはないとの観察から得られる。従って計算された解ベクトルの最後の解ベクトルを新スタート値として前もって与えることが可能である。

【0153】1つの更なる有利な態様ではスタート値が、既に計算された解ベクトルからの補外により求められる。等間隔の周波数という特別の場合においては例えば、最後の3つの解ベクトル x_{i-3} 、 x_{i-2} 及び x_{i-1} からスタート値 $x_i^{(0)}$ を2乗補外する次式(63)が存在する。

【0154】

$$x_i(0) = x_{i-3} - 3x_{i-2} + 3x_{i-1} \quad (63)$$

迅速な収束の作用を、複数の方程式系のうちの1つの方程式系が直接解法により解かれ、次いで、計算された因数分解が、残りの方程式系を反復的に解くためのプリコンディショナとして採用される場合に観察することが可能である。

【0155】このシェーマと前述の補外アプローチとの組合せにより、電気力学的散乱問題の広帯域解析のための効率的なプロシージャが得られる。この方法は以下においてFFS法と称される。等間隔周波数という特別の場合のためのアルゴリズムが次式(Alg-1)により表される。

【0156】 $f := f_{\min}$

A及びbを計算する

$M^{-1} := A$ (又はAの因数分解) を計算する

$x := M^{-1}b$

$f < f_{\max}$ である限り

$f := f + \Delta f$

A及びbを計算する

スタート値 $x^{(0)}$ を補外する

$AM^{-1}x^* = b^*$ を反復的に解く

$x := M^{-1}x^*$

終了

(Alg-1)

一連の計算は例えば最も低い周波数 f_{\min} でスタートされる。当該の方程式系が設定され、マトリクスAが適切に積の形に分解されると第1の解ベクトルが逆置換により得られる。Aの計算された積の形への分解は次いで、残りの方程式系を反復的に解くためのプリコンディショナ M^{-1} として採用される。このために周波数fはステップ毎に f_{\min} から f_{\max} まで高められ、その際、右側のプリコンディショニングの場合には、実際の解ベクトルxではなく変換された値 x^* が補外されることに注意されなければならない。実際の解ベクトルxは反復プロセスの後に関係式 $x := M^{-1}x^*$ を介して求められることが可能である。

【0157】所要の計算コストはFFS法において実質的にマトリクスMの積の形への分解によりすなわち方程式系を直接解くことにより求められる。プリコンディショナとしてのマトリクス M^{-1} を用いて、残りの方程式系を次いで反復的に解くことは大部分の場合には僅かな数の反復に制限することが可能である。

* 【0158】個々の周波数がFFS法において処理されるシーケンスは必ずしもアルゴリズム(Alg-1)に表されているように f_{\min} から f_{\max} へのシーケンスで必要はない。この方法の1つの変形として、最高周波数 f_{\max} から開始し、当該の方程式系を直接解き、次いで周波数をステップ毎に低減することも可能である。

【0159】更にプリコンディショナ M^{-1} を平均周波数 f_c に対して計算することも可能である。次いで周波数は選択的に f_{\min} から f_{\max} へ、 f_{\max} から f_{\min} へ又はまず初めに f_c から f_{\min} へ次いで f_c から f_{\max} へと処理される。この代替プロシージャの利点は、マトリクス M^{-1} の広帯域加速効果が双方の周波数方向において利用されることが可能であることにある。

【0160】遅延ポテンシャルの多極展開

高速多極法の要諦は、所要の電流分布のポテンシャル及び場を近似的にいくつかの僅かな数のスカラー係数により特徴付ける方法である。“多極法”との用語により示されるように有利にはポテンシャル及び場の球多極展開が使用される。

20 【0161】本発明において使用される線重み付け法

(詳細な説明は前述の当該の説明を参照)は、遅延されたポテンシャルA及び ϕ を基礎にしているのでこれらの双方の値は、相応する多極展開により特徴付けられる。

【0162】これの代替として、電場の強さEの多極展開を行うことも可能である。しかし遅延ポテンシャルA及び ϕ の多極展開に比して、数値的に処理するのが困難な複雑な解析的關係が現れる。

【0163】球座標の次式(64)により表される同次ヘルムホルツ方程式の解の集合が求めるのが目的である。

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot u = 0 \quad (64)$$

ただし、kは波数、uは、ヘルムホルツ方程式を満足する関数である。

【0165】これらの解を用いて任意の関数uを無限級数で表すことが可能である。この場合に現れる係数をしばしば解析的に求めることが可能である。

【0166】ヘルムホルツ方程式(64)を図8の球座標r, θ , α を用いて表す場合には次式(65)が得られる。

40 【0167】

【数28】

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + k^2 u = 0 \quad (65)$$

【0168】偏微分方程式を解くために次式(66)により表される変数分離法が選択される。

【0169】

$$u = U_r(r) \cdot U_\theta(\theta) \cdot U_\alpha(\alpha) \quad (66)$$

この場合に因子 U_r , U_θ 及び U_α はそれぞれ1つの座

標のみに依存する。式(66)を式(65)の中に代入し、 $r^2 \sin^2 \theta / u$

と乗算することにより次式(67)が得られる。

50 【0170】

【数29】

$$\frac{\sin^2 \theta}{U_r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_r}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{U_\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU_\theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{U_\alpha} \frac{d^2 U_\alpha}{d\alpha^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (67)$$

α に依存する項を分割でき、分離定数 m を用いて次式(68)により置換可能である。

$$\frac{1}{U_\alpha} \frac{d^2 U_\alpha}{d\alpha^2} = -m^2 \quad (68)$$

これにより式(67)から、 α から独立している関係式(69)が得られる。

$$\frac{1}{U_r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_r}{dr} \right) + \frac{1}{U_\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU_\theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + k^2 r^2 = 0 \quad (69)$$

【0171】 θ への依存性を分離するために、式(6 * 【0172】
9)の中の当該の項が分離定数1により次式(70)に 【数30】
より表される。 *

$$\frac{1}{U_\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU_\theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -1(1+1) \quad (70)$$

次式(71)により表される r に依存する微分方程式が残る。

$$\frac{1}{U_r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_r}{dr} \right) - 1(1+1) + k^2 r^2 = 0 \quad (71)$$

【0173】変数分離法により式(66)からヘルムホ * 【0174】
ルツ方程式は、3つの常微分方程式(72a), (72 * 【数31】
b)及び(72c)に変換される。 ※

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU_r}{dr} \right) + [(kr)^2 - 1(1+1)] \cdot U_r = 0 \quad (72a)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU_\theta}{d\theta} \right) + \left[1(1+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \cdot U_\theta = 0 \quad (72b)$$

$$\frac{d^2 U_\alpha}{d\alpha^2} + m^2 U_\alpha = 0 \quad (72c)$$

【0175】方程式(72c)は、定数の係数を有する常微分方程式であり、次式(73)により表される解を有する。

$$U_{\alpha, m} \sim e^{im\alpha} \quad (73)$$

2次的条件 $U_\alpha(\alpha + 2\pi) = U_\alpha(\alpha)$ より、 m は整数値のみしかとることができない、すなわち $m \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} は整数の集合)である。

【0177】式(72b)はルジャンドル方程式の1つの特殊形である。この方程式の解は、第1種及び第2種の随伴ルジャンドル関数である。 ☆

$$P_1^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_1(x) \quad (75)$$

【0180】これにより次が得られる。

【0181】

☆ 【0178】

$$U_{\theta, 1m} \sim P_1^m(\cos \theta), Q_1^m(\cos \theta) \quad (74)$$

ほぼすべてのルジャンドル関数は $\theta=0$ 及び $\theta=\pi$ において特異点を有し、従って有利には無視される。1つの例外は関数 $P_1^m(\cos \theta)$ であり、ただし、 $1, m \in \mathbb{N}_0$ であり、この関数は第1次のルジャンドル多項式 P_1 に次式(75)を介して関連している。

【0179】

【数32】

$$P_1^0(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) \quad (76)$$

50 及び $m>1$ の場合、

31

$$P_l^m(\cos \theta) = 0 \quad (77)$$

第0次から第2次までの第1種の随伴ルジャンドル関数は次式により表される。

$$[0182] P_0^0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$$

$$P_2^0(\cos \theta) = 3/2 \cos^2 \theta - 1/2$$

$$P_2^1(\cos \theta) = -3 \sin \theta \cos \theta$$

$$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$$

方程式(72a)は、解として次式(78)により表さ*10

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J_{1+0.5}(x), \quad y_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot Y_{1+0.5}(x) \quad (79)$$

[0185] 例えば次式が成立つ。

$$[0186] j_0 = \sin(kr) / kr$$

$$y_0 = -\cos(kr) / kr$$

$$j_1 = \sin(kr) / (kr)^2 - \cos(kr) / kr$$

$$y_1(kr) = -\cos(kr) / (kr)^2 - \sin(kr) \times [0187]$$

$$h_1^{(1)}(kr) = j_1(kr) + i \cdot y_1(kr) \quad (80a)$$

$$h_1^{(2)}(kr) = j_1(kr) - i \cdot y_1(kr) \quad (80b)$$

上記の関数は完全解uの表現に関して、関数 $J_1(kr)$, $y_1(kr)$ に等価である。関数uの種類に依存して球ベッセル関数又は球ハンケル関数を優先させると有利である。関数uが例えば原点において有界の場合には関数 $j_1(kr)$ のみを使用するだけで充分である、何故ならば関数 $y_1(kr)$ 及びひいては球ハンケル関

$$u_{lm} = b_l(kr) \cdot P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot e^{im\alpha} \quad (81)$$

ただし $b_l(kr)$ は第1次の球ベッセル関数又は球ハンケル関数の線形結合を表し、 $l \in N_0$ 及び $m \in Z$ である。

[0190] 完全解uに対して式(77)を考慮して次*30

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} \cdot u_{lm} = \quad (82)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} \cdot b_l(kr) \cdot P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot e^{im\alpha}$$

[0192] ただし係数 C_{lm} は定数である。

[0193] 球面関数

式(82)の角度に依存する項 $P_l^{|m|}(\cos \theta)$ 及び $e^{im\alpha}$ を組み合わせると、いわゆる球面関数 $Y_l^m(\theta, \alpha)$ が

得られる。適切な正規化係数を与えることにより、 $0 \leq \alpha < 2\pi$

$$Y_l^m(\theta, \alpha) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\alpha} \quad (83)$$

[0195] $m < 0$ の球面関数は次式(84)の対称性により表される。

$$[0196] Y_l^{-m}(\theta, \alpha) = (-1)^m Y_l^m(\theta, \alpha)^*$$

これにより次式(85)により表される正規直交条件が*

$$\oint_{\Omega} Y_l^m(\theta, \alpha) \cdot Y_{l'}^{m'}(\theta, \alpha)^* d\alpha = \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'} \quad (85)$$

32

*れる球ベッセル関数を有するベッセル微分方程式である。

[0183]

$$U_{r,l} \sim j_l(kr), \quad y_l(kr) \quad (78)$$

これらのベッセル関数は、既知の円柱ベッセル関数 $J_l(x)$, $Y_l(x)$ に次の関係式(79)を介して関連付けられ、初等関数により表される。

[0184]

[数33]

* / kr

球ベッセル関数を組み合わせることにより次式(80a)及び(80b)により表される第1種及び第2種の球ハンケル関数が得られる。

[0187]

20 ☆ 数 $h_1^{(1)}(kr)$, $h_1^{(2)}(kr)$ は $r \rightarrow 0$ に対して特異になるからである。

[0188] 球座標の同次ヘルムホルツ方程式の求める解 u_{lm} は次式(81)により表される。

[0189]

☆ 式(82)により表される級数展開が得られる。

[0191]

[数34]

◇ $m \leq 1$ の場合には、球面関数を次式(83)により表すことができる。

[0194]

[数35]

* 成立つ。

[0197]

[数36]

【0198】ただし、 Ω は単位球の表面、 δ は次式(86)により表されるクロネッカーの記号を示す。

【0199】 $l=1'$ の場合には $\delta_{ll'}=1$

その他の場合には $\delta_{ll'}=0$ (86)

球面関数は Ω 上でインデックス l 及び m に関して完備正規直交系を成す。このことから球面関数の最も重要な特*

*性の1つが得られる、すなわち任意の有界関数 $g(\theta, \alpha)$ を球面関数 $Y_l^m(\theta, \alpha)$ を用いて次式(87)のように1つの級数に展開可能であることである。

【0200】

【数37】

$$g(\theta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} \cdot Y_l^m(\theta, \alpha) \quad (87)$$

係数 C_{lm} は式(85)を考慮すると次式(88)により求められる。

$$C_{lm} = \iint_{\Omega} g(\theta, \alpha) \cdot Y_l^m(\theta, \alpha)^* da \quad (88)$$

【0201】第0次から第2次までの球面関数は次式により表される。

※【0202】

※【数38】

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cdot \sin^2 \theta \cdot e^{-i2\alpha}$$

$$Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot e^{-i\alpha}$$

$$Y_2^1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot e^{-i\alpha}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos \theta$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot e^{i\alpha}$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot e^{i\alpha}$$

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cdot \sin^2 \theta \cdot e^{i2\alpha}$$

【0203】グリーン関数の加法定理
次式(89)により表されるグリーン関数

$$G(r, r) = e^{-ikR}/R \quad (89)$$

(ただし $R = \|r - r'\|$ である)は、一定の係数 m で、場所 r' に位置する振動点電荷の遅延ポテンシャル \star

\star を表す。グリーン関数をヘルムホルツ方程式の球関数の解により展開すると次式(90)が得られる。

【0204】

【数39】

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \begin{cases} -\epsilon_{ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2} j_l(kr') Y_l^m(\theta', \alpha') h_l^{(2)}(kr) Y_l^m(\theta, \alpha)^* & \forall r > r' \\ -\epsilon_{ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2} h_l^{(2)}(kr') Y_l^m(\theta', \alpha') j_l(kr) Y_l^m(\theta, \alpha)^* & \forall r < r' \end{cases} \quad (90)$$

【0205】多極展開

式(90)を用いて遅延ポテンシャル A 及び ϕ の多極展開を導出することが可能である。このために式(90)を式(14a)及び(14b)の中に代入し、積分と加算との順序を逆にする。このような配置換えは許容される、何故ならば $r=r'$ という特殊な場合は既に式(90)から除外されているからである。ベクトルポテンシャル A の展開は、式(90)を3つの直交座標成分 A_x 、 A_y 及び A_z に別個に適用することにより行われ

る。

【0206】観測点及びソース点の位置に依存して異なる種類の多極展開が得られる。図9のaに略示されている $r > r'$ の場合の配置によりいわゆるグローバル多極展開が得られ、この展開では外方へのローカルソース分布 G の作用が多極展開の形で表される。半径 d 及び D を有する双方の略示されている円は、(半径 d より小さい)近距離場のための境界と、(半径 D より大きい)遠距離場のための境界とを表す。

【0207】遅延ポテンシャルの当該の級数展開は次式 * 【0208】
(91a) により表される。 * 【数40】

$$\Delta(x) = -ik\mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm}^g h_l^{(2)}(kx) Y_l^m(\theta, \alpha)^* \quad (91a)$$

$$\phi(x) = -\frac{ik}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l p_{lm}^g h_l^{(2)}(kx) Y_l^m(\theta, \alpha)^*$$

ただしグローバル多極係数 α_{lm}^g 及び p_{lm}^g は次式 (91b) により表される関係式により計算することが可能である。

$$\alpha_{lm}^g = \iiint_G J(x') j_l(kx') Y_l^m(\theta', \alpha') dv' \quad (91b)$$

$$p_{lm}^g = \iiint_G \rho(x') j_l(kx') Y_l^m(\theta', \alpha') dv'$$

【0209】より簡単な表現のためにAの3つのスカラー多極係数をまとめ、これによりベクトル係数 a_{mn} が形成される。

【0210】図9のbに略示されている場合、すなわち観察者点がソース点に比して座標原点の近くに位置する場合、すなわち $r < r'$ の場合にはローカル多極展開が※

※得られる。この場合には、十分に遠くに位置するソース分布Gの作用がローカルに展開される。これにより遅延ポテンシャルA及び ϕ に対して次式 (92a) が得られる。

【0211】

【数41】

$$\Delta(x) = -ik\mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm}^l j_l(kx) Y_l^m(\theta, \alpha)^* \quad (92a)$$

$$\phi(x) = -\frac{ik}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l p_{lm}^l j_l(kx) Y_l^m(\theta, \alpha)^*$$

ただし上記式の中のローカル多極係数に関して次式 (92b) が成立つ。

$$\alpha_{lm}^l = \iiint_G J(x') h_l^{(2)}(kx') Y_l^m(\theta', \alpha') dv' \quad (92b)$$

$$p_{lm}^l = \iiint_G \rho(x') h_l^{(2)}(kx') Y_l^m(\theta', \alpha') dv'$$

【0212】プログラム技法的な実現の範囲では、級数展開 (91a) 及び (92a) は有限の数の項の後で打ち切られる。打ち切りが外側の加算インデックス $l=0, 1, \dots, L$ に対して行われる場合、帰納的に、得られる第L次の多極展開が常に $(L+1)^2$ の項を含むことを示すことが可能である。従って第L次までの遅延ポテンシャルA、 ϕ の多極展開のために全部で $4(L+1)^2$ のスカラー係数が必要とされる。

【0213】1の値に相応して最も重要な多極係数は通常は次の通りである。

【0214】 $l=0$: 単一極係数

$l=1$: 2重極係数

$l=2$: 4重極係数

$l=3$: 8重極係数

$l=4$: 16重極係数

以下同様

図9のa及び図9のbにおいて観察者領域はソース領域から、半径d又はDを有する2つの球面により境界を定められている。 $d \ll \lambda$ において多極展開の収束はステディックな場合に適合し、実質的に d/D の比に依存する。級数は、 d/D が小さければ小さい程により良好に収束する。これに対して、電氣的に大きいソース領域の場合、すなわちdが1つの波長以上のオーダーの値である場合には複雑な干渉パターンが形成され、このような干渉パターンを処理するために有利には $L \geq kd$ が選択される。

【0215】部分領域の多極展開

高速多極法の範囲では、調査する物体を前述のようにサブ分割することが利用される。

【0216】サブ分割から得られるそれぞれの部分領域の中で、1つの独立したグローバル又はローカルな多極

展開が行われる、すなわち自由度 F_W の各々のインデッ

クス集合に対して一連の多極係数 a_{lm}^g 及び p_{lm}^g も一連の対応するローカル多極係数 a_{lm}^l 及び p_{lm}^l も存在する。この場合に多極展開はそれぞれの立方体中心点 r_{C_W} に関して行われる。

【0217】基底関数 Ψ_n (式(29a) 及び (29b) を参照) による電流分布の表現を式(91a, b) *

$$\Delta_w(x) = -ik\mu_0 \sum_{l=0}^L \sum_{m=-1}^1 a_{lm,w}^1 h_1^{(2)}(kr) Y_1^m(\theta, \alpha)^* \quad (93a)$$

$$\varphi_w(x) = -\frac{k}{w\epsilon_0} \sum_{l=0}^L \sum_{m=-1}^1 p_{lm,w}^g h_1^{(2)}(kr) Y_1^m(\theta, \alpha)^*$$

ただし上記式の中のグローバル多極係数は次式(93b)により表される。

$$a_{lm,w}^g = \sum_{n \in F_W} I_n \iint_{S_n} \bar{\Psi}_n(x') h_1(kr') Y_1^m(\theta', \alpha') da' \quad (93b)$$

$$p_{lm,w}^g = \sum_{n \in F_W} I_n \iint_{S_n} \nabla_{S'} \cdot \bar{\Psi}_n(x') h_1(kr') Y_1^m(\theta', \alpha') da'$$

ここで基底関数 Ψ_n は式(29)では、 $\bar{\Psi}_n$ で表すものとする。

【0219】更に前述の代入により個々の部分領域におけるローカル多極展開が次式(94a)により表される。
※

$$\Delta_w(x) = -ik\mu_0 \sum_{l=0}^L \sum_{m=-1}^1 a_{lm,w}^1 h_1(kr) Y_1^m(\theta, \alpha)^* \quad (94a)$$

$$\varphi_w(x) = -\frac{k}{w\epsilon_0} \sum_{l=0}^L \sum_{m=-1}^1 p_{lm,w}^1 h_1(kr) Y_1^m(\theta, \alpha)^*$$

ただし上記式の中のローカル多極係数は次式(94b)により表される。

$$a_{lm,w}^1 = \sum_{n \in F_W \setminus N_W} I_n \iint_{S_n} \bar{\Psi}_n(x') h_1^{(2)}(kr') Y_1^m(\theta', \alpha') da' \quad (94b)$$

$$p_{lm,w}^1 = \sum_{n \in F_W \setminus N_W} I_n \iint_{S_n} \nabla_{S'} \cdot \bar{\Psi}_n(x') h_1^{(2)}(kr') Y_1^m(\theta', \alpha') da'$$

【0221】球座標 r , θ 及び α の上のティルダは、それぞれの立方体中心点 r_{C_W} に関するローカル座標であることを示す。方程式(94b)の中のローカル多極係数を求める際に、隣接領域の外部に位置する、すなわち $n \in F \setminus N_W$ であるソース領域を考慮した。

【0222】EMCシミュレーションの領域内の調査する物体(印刷回路板、配線等)は有利には小さい部分領域になるので、式(93a) 及び (94a) の中の級数展開の収束の挙動は主に d/D の比により定められる。グローバル多極展開(93a)が隣接領域の外部で評価される場合には、3次元空間の立方体状の部分領域においてグローバル展開に対してもローカル展開に対しても次式が成立つ。

* 及び (92a, b) の中に代入することにより個々の部分領域におけるグローバル多極展開が次式(93a)により表される。

【0218】

【数42】

※ 【0220】
【数43】

【0223】
【数44】

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

【0224】低い周波数における安定性の問題

調査する物体を自由度又は基底関数に従って分割する場合には低い周波数において電気スカラーポテンシャル ϕ のグローバル多極展開に関して不安定性が発生する。

【0225】図10はこの問題を簡単な導体ループを例にして示す。この導体ループのスカラーポテンシャルは4つのグローバル多極展開により表される(図10のa)。周波数が低減するにつれて導体表面における全電荷が消失する、何故ならば電流分布の均一性が高まるか

らである。しかし同時に連続方程式に起因して個々の基底関数の中の電荷は $1/\omega$ (式(29b)参照)の増加と共に増加する。基底関数が重なる限りは電荷は互いにキャンセルし、全電荷は消失しなければならないという要求は満足される。しかし基底関数の“ストレッチング”により境界エレメントにおいては、もはや互いに補償することができない電荷が残る、何故ならばこれらの電荷には異なる多極が割当てられているからである(図10のb参照)。φの多極展開が有限の数の項の後に打ち切りされる場合には打ち切り誤差が発生し、打ち切り誤差は周波数が低減されると共に、より重大になる問題を発生する。

【0226】この困難は実際が多極展開が行われる前に電荷に互いにキャンセルする機会を与えることにより改善される。1つの可能なプログラム技術的実現は、すべてのグローバル多極展開を基底関数に従ってではなくエレメントに従って行うことにある。

【0227】高速多極法(FMM)

以下においてFMMと称される高速多極法は例えばV. Rokhlinの論文“Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory.” (Journal of Computational Physics, 第60巻、第187頁～第207頁、1985年)から公知である。ダイナミックな場合のためのFMMを実施するすべて方法は、部分領域が波長に比して大幅に大きい散乱問題に適する。このような問題において、使用される多極展開の高い次数が必要である。この形式論における1つの重大な欠点は、多極係数が明示的に計算されないという特性から発生する。明示的な計算の代わりに、展開する関数は、取り囲む球面上の離散的な点において“サンプル”され、次いでサンプル値が直接処理される。この場合により高い次数の多極項の抑止は簡単にできないので障害となるエーリアシング効果が発生することがあり、エーリアシング効果は場合によっては多極展開の中の誤差を惹起することがある。

【0228】ここで提案する方法は特に、モデルの幾何学的構造ひいては部分領域の寸法とが波長に比して小さい散乱問題に適する。このような前提の下に干渉効果は制限されるので、ポテンシャル又は場の強さの表現のためには、既に僅かな数の多極係数で充分である。前述の安定化法によりこの方法は低い低周波においても安定している。

【0229】とりわけ重要なのは、放射を含むEMC問題の領域内での高速多極法の使用である。シミュレートする測定は有利には数デシベルまで正確に行われる。

【0230】前述の反復解法を、空の全く無い方程式系への適用において、計算するマトリクス・ベクトル積により有利には1つの反復ステップ当り $O(N^2)$ 浮動小数点演算の複雑性が生ずる。これに対してFMMの使用により、基礎となる積分方程式の特別の構造に起因して

マトリクス・ベクトル積ひいては反復ステップとが $O(N^2)$ 浮動小数点演算より少ない演算で実行することが可能となる。

【0231】出発点は次式(95)により表される形でマトリクスZの要約された表現である。

$$[0232] \quad Z = Z' + L T G \quad (95)$$

ただし、Z' はマトリクスZの互いに隣接する部分領域の間の結合を表す部分を示し、LTGはマトリクスZの、互い離れた部分領域の間の結合を表す残りの部分すなわち $i \in F_W, j \in F \setminus N_W$ を示す。

【0233】前述の安定化法(低い周波数における安定性の問題の節を参照)が用いられない場合にはマトリクスZ' は次式(96)により求められる。

【0234】

$$i \in F_W, j \in N_W \text{ の場合には } Z'_{ij} = Z_{ij}$$

$$\text{その他の場合には } Z'_{ij} = 0 \quad (96)$$

安定化された場合においては付加的な補正項が発生する。

【0235】図11にはインデックス集合 F_W の観察者領域BGが示され、この観察者領域はインデックス集合NWの隣接領域NGにより囲まれている。従って隣接領域NGは直接的に結合されている。離れた領域WEGは観察者領域BGへの間接的結合として示されている。グローバル多極展開GMPEは、×印を有する領域の中で行われ、これに対してローカル多極展開は観察者領域BGの中で行われる。

【0236】以下において個々の部分領域のグローバル多極係数 a_{lm}^g, p_{lm}^g は合成されて1つのベクトル c^g が形成される。同様にベクトル c^l はすべてのローカル多極係数 a_{lm}^l, p_{lm}^l を含む。図11の隣接領域はローカル多極展開の範囲内で考慮されない。何故ならば相応する寄与は既にマトリクスZ' の中に含まれているからである。第L次までの多極展開が行われる場合には、W個の部分領域の場合に次式が成立つ。

【0237】

【数45】

$$c^g, c^l \in C^{4W(L+1)^2}$$

【0238】ベクトル c^g 及び c^l は次式(97a)及び(97b)により計算される。

$$[0239] \quad c^g = G \cdot I \quad (97a)$$

$$c^l = T \cdot c^g = T \cdot G \cdot I \quad (97b)$$

すなわちマトリクスGにより、所与の電流分布Iに対して部分領域内のグローバル多極展開を求めることが可能である。これから次いでいわゆる移動マトリクスTがローカル多極係数 c^l を計算する。移動マトリクスTは、図11で×印により示されているグローバル多極展開を集めて1つのローカル多極展開を形成する。最後にローカル多極展開がマトリクスLを用いて観察者点において評価され、隣接寄与値に次式(98)のように加算され

る。

$$[0240] \quad ZI = Z' I + Lc^1 \quad (98)$$

安定化されていない場合にはマトリクスG及びLはブロック対角マトリクスであり、個々の対角ブロックは部分領域の多極展開を、部分領域の中に含まれている基底関数に結合する。Gのマトリクスエレメントを計算するための関係式は直接に、式(93a, b)によるグローバル多極展開から得られる。求めるマトリクスエレメントは、式(93b)の中に現れる積分項に相当する。Lのマトリクスエレメントを計算するための関係式は式(94a)を重み付け式(34)の中に代入することにより得られる。この場合に有利には式(34)の中の値A, ϕ がそれぞれの部分領域 A_W , ϕ_W の寄与値により置換されなければならないことが注意しなければならない。

【0241】インピーダンスを有するエレメントを前述のプロシージャにより考慮することが可能である。隣接エレメントに対してのみに補正項が現れるので、行われべき変更はマトリクス Z' に制限される。

【0242】移動マトリクスTの計算を以下において説明する。

【0243】移動演算子
多極展開の一義的特徴付けには個々の多極係数の外に、展開が行われる際の規準となる座標系の指定が含まれる。多極係数は直接的に展開中心(座標原点)にも角度*

* 値 θ 及び α の定義(座標軸の向き)にも依存する。

【0244】高速多極法の範囲内で必要である、与えられた多極展開の係数を新座標系に変換するための演算子は移動演算子である、何故ならば座標軸の向きはいわゆる回転演算子と異なり保存されるからである。多極展開が有限の数の係数の後に打ち切られる場合には求める移動演算子は、空の全く無い正方形移動マトリクスの形で表される。

【0245】以下において使用される幾何学的変数は図12に示されている。点Pの位置ベクトルは旧座標系においては $r^- = (r^-, \theta^-, \alpha^-)$ で、新座標系においては $r = (r, \theta, \alpha)$ で示されている。更に旧座標原点 O^- は位置ベクトル $r' = (r', \theta', \alpha')$ により新座標系の中に一義的に定められている。これにより移動は負の r' 方向で行われる。この場合に考慮される移動演算子は、有利には与えられたグローバルな多極展開を新ローカル多極展開に変換する、すなわち $r < r'$ である移動演算子である。

【0246】出発点は、グリーン関数(式(90)参照)の加法定理から求める移動演算子を導出することであり、これにより、グローバル単極項($l=m=0$)を移動するための次式(99)が得られる。

【0247】

【数46】

$$h_0^{(2)}(kr) y_0^0(\theta, \alpha) = \sqrt{4\pi} \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-1}^1 h_1^{(2)}(kr') y_1^m(\theta', \alpha') h_1^m(\theta, \alpha) \quad (99)$$

この場合に次式により表される等式が考慮されている。

$$h_0^{(2)}(kr) = i \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad \text{及び} \quad y_0^0(\theta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

【0248】

※ ※ 【数47】

式(99)は所望の移動を表すという事実は、新ローカル多極項の重量により置換可能な旧単極項が含まれていることから示すことができる。次式により表される個々の予係数

$$\sqrt{4\pi} h_1^{(2)}(kr') y_1^m(\theta', \alpha')$$

は移動ベクトル r' のみに依存し、事前に計算され、移動マトリクスの第1の列の中に入れることが可能である。上の記述で r^- , θ^- , α^- はそれぞれ式中の r , θ , α を表す。

プログラム技法的实现のために有利には、求める演算子は式(99)の逐次微分により反復的に求められる。

【0249】プログラム技法の実現のために有利には、求める演算子は式(99)の逐次微分により反復的に求められる。

【0250】所要の微分関係式を表すためにまず初めに次式(100a), (100b)及び(100c)により表される微分演算子を導入する。

【0251】

$$\partial_+ = \partial / \partial x + i \cdot \partial / \partial y \quad (100a)$$

$$\partial_- = \partial / \partial x - i \cdot \partial / \partial y \quad (100b)$$

$$\partial_z = \partial / \partial z \quad (100c)$$

これにより例えば次式(101a), (101b)及び(101c)が成立つ。

【0252】

* 【数48】

$$\partial_+ \left[h_0^{(2)}(kr) Y_0^0(\theta, \alpha) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} k h_1^{(2)}(kr) Y_1^1(\theta, \alpha) \quad (101a)$$

$$\partial_- \left[h_0^{(2)}(kr) Y_0^0(\theta, \alpha) \right] = -\sqrt{\frac{2}{3}} k h_1^{(2)}(kr) Y_1^{-1}(\theta, \alpha) \quad (101b)$$

$$\partial_z \left[h_0^{(2)}(kr) Y_0^0(\theta, \alpha) \right] = -\sqrt{\frac{1}{3}} k h_1^{(2)}(kr) Y_1^0(\theta, \alpha) \quad (101c)$$

【0253】すなわち第1次の多極項(2重極)は直接的に単極項の適切な微分により導出できる。高次の多極項に対する相応する関係式は以下のように導出される。

【0254】球ハンケル関数に対しては次式(102

※a), (102b)及び(102c)により表される初等微分関係式が得られる。

【0255】

【数49】

$$\partial_+ \left[r^{l+1} h_1^{(2)}(kr) \right] = kr^{l+1} h_{1-1}^{(2)}(kr) \sin \theta e^{i\alpha} \quad (102a)$$

$$\partial_- \left[r^{l+1} h_1^{(2)}(kr) \right] = kr^{l+1} h_{1-1}^{(2)}(kr) \sin \theta e^{-i\alpha} \quad (102b)$$

$$\partial_z \left[r^{l+1} h_1^{(2)}(kr) \right] = kr^{l+1} h_{1-1}^{(2)}(kr) \cos \theta \quad (102c)$$

【0256】同様なことが次式(103a), (103b)及び(103c)により表されるように球面関数に対しても成立つ。

☆【0257】

【数50】

☆30

$$\partial_+ \left[\frac{Y_l^m(\theta, \alpha)}{r^{l+1}} \right] = a_1^m (2l+1) \frac{Y_{l+1}^{m+1}(\theta, \alpha)}{r^{l+2}} \quad (103a)$$

$$\partial_- \left[\frac{Y_l^m(\theta, \alpha)}{r^{l+1}} \right] = -b_1^m (2l+1) \frac{Y_{l+1}^{m-1}(\theta, \alpha)}{r^{l+2}} \quad (103b)$$

$$\partial_z \left[\frac{Y_l^m(\theta, \alpha)}{r^{l+1}} \right] = -c_1^m (2l+1) \frac{Y_{l+1}^m(\theta, \alpha)}{r^{l+2}} \quad (103c)$$

【0258】ただし上記式の中の次の係数(104a), (104b)及び(104c)は定数である。

【0259】

【数51】

$$a_1^m = \sqrt{\frac{(1+m+1)(1+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} \quad (104a)$$

$$b_1^m = \sqrt{\frac{(1-m+1)(1-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} \quad (104b)$$

$$c_1^m = \sqrt{\frac{(1+m+1)(1-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \quad (104c)$$

【0260】上記の係数は球面関数の定義(式(83) 10*5b)及び(105c)により表される微分関係式が得参照)から正規化係数に基づいて得られる。式(102 a~c)と式(103 a~c)とを組み合わせることに【0261】より、高次の多極項に対する次式(105a), (10*【数52】

$$\begin{aligned} \partial_+ \left[h_1^{(2)}(kr) Y_1^m(\theta, \alpha) \right] &= a_1^m (2l+1) \frac{h_1^{(2)}(kr)}{r} Y_{1+1}^{m+1}(\theta, \alpha) + \\ &+ kh_{1-1}^{(2)}(kr) \sin \theta e^{i\alpha} Y_1^m(\theta, \alpha) \end{aligned} \quad (105a)$$

$$\begin{aligned} \partial_- \left[h_1^{(2)}(kr) Y_1^m(\theta, \alpha) \right] &= -b_1^m (2l+1) \frac{h_1^{(2)}(kr)}{r} Y_{1+1}^{m-1}(\theta, \alpha) + \\ &+ kh_{1-1}^{(2)}(kr) \sin \theta e^{-i\alpha} Y_1^m(\theta, \alpha) \end{aligned} \quad (105b)$$

$$\begin{aligned} \partial_z \left[h_1^{(2)}(kr) Y_1^m(\theta, \alpha) \right] &= -c_1^m (2l+1) \frac{h_1^{(2)}(kr)}{r} Y_{1+1}^m(\theta, \alpha) + \\ &+ kh_{1-1}^{(2)}(kr) \cos \theta Y_1^m(\theta, \alpha) \end{aligned} \quad (105c)$$

【0262】上記の関係式を次式(106)により表さ ※変形することが可能である。
れる球ハネル関数に対する帰納的な関係式と、次式【0263】
(107a), (107b)及び(107c)により表【数53】
される球面関数に対する帰納的な関係式とを用いて更に※30

$$h_{1-1}^{(2)}(kr) + h_{1+1}^{(2)}(kr) = (2l+1) \frac{h_1^{(2)}(kr)}{kr} \quad (106)$$

$$\sin \theta e^{i\alpha} Y_1^m(\theta, \alpha) = a_{1-1}^{m-1} \cdot Y_{1-1}^{m+1}(\theta, \alpha) - a_1^m \cdot Y_{1+1}^{m+1}(\theta, \alpha) \quad (107a)$$

$$\sin \theta e^{-i\alpha} Y_1^m(\theta, \alpha) = -b_{1-1}^{m+1} \cdot Y_{1-1}^{m-1}(\theta, \alpha) - b_1^m \cdot Y_{1+1}^{m-1}(\theta, \alpha) \quad (107b)$$

$$\cos \theta Y_1^m(\theta, \alpha) = c_{1-1}^m \cdot Y_{1-1}^m(\theta, \alpha) - c_1^m \cdot Y_{1+1}^m(\theta, \alpha) \quad (107c)$$

【0264】これにより最終的には次式(108a), 【0265】
(108b)及び(108c)により表される対称な微【数54】
分関係式が得られる。

$$\partial_+ \left[h_1^{(2)}(kr) y_1^m(\theta, \alpha) \right] = a_1^m k h_{1+1}^{(2)} y_{1+1}^{m+1}(\theta, \alpha) + a_{1-1}^{-m-1} k h_{1-1}^{(2)}(kr) y_{1-1}^{m+1}(\theta, \alpha) \quad (108a)$$

$$\partial_- \left[h_1^{(2)}(kr) y_1^m(\theta, \alpha) \right] = -b_1^m k h_{1+1}^{(2)} y_{1+1}^{m-1}(\theta, \alpha) - b_{1-1}^{-m+1} k h_{1-1}^{(2)}(kr) y_{1-1}^{m-1}(\theta, \alpha) \quad (108b)$$

$$\partial_z \left[h_1^{(2)}(kr) y_1^m(\theta, \alpha) \right] = -c_1^m k h_{1+1}^{(2)} y_{1+1}^m(\theta, \alpha) + c_{1-1}^m k h_{1-1}^{(2)}(kr) y_{1-1}^m(\theta, \alpha) \quad (108c)$$

【0266】

* * 【外1】

上記の関係式を用いて、求める移動演算子を計算することが可能である。このために式(99)を座標 r' 、 θ' 、 α' に関して逐次微分することにより第(1-1)次及び第1次の移動演算子から第(1+1)次の移動演算子が帰納的に得られる。 $\partial = -\partial'$ が成立することに注意されたい。

【0267】多段アルゴリズム

前述の1段FMMの外に、異なる大きさの部分領域が使用される種々の多段変形が存在する。図13には2段FMM形の場合に対する、当該部分領域が示されている。

【0268】図13にはインデックス集合 F_W の観察者領域BGが示され、観察者領域BGはインデックス集合 N_W の隣接領域NGにより囲まれている。従って隣接領域NGは直接結合されている。遠く離れた領域WEGは観察者領域BGへの間接結合として示されている。グローバル多極展開GMPEは、×印を有する領域内で行われ、これに対してローカル多極展開は観察者領域BG内で行われる。

【0269】部分領域の大きさは多段FMMアルゴリズムにおいては有利には観察者領域とソース領域との間の距離に比例して定められる。種々の細分化レベルにおける多極展開は特別の移動演算子を用いて互いに交換可能であり、これにより得られる1つの利点は、ハイアレーキ的な領域構造のそれぞれの部分領域に対して完全な多極展開を行わなくてもよいことにある。

【0270】ダイナミックな場合にはより大きい部分領域に対して高次の多極展開を行うと有利である。

【0271】図1には電磁場を求める方法のステップを示すブロック図が示されている。ステップ1aでは、部分領域にサブ分割された調査する物体に対するグローバル多極展開が前述のように行われる。ステップ1bでは、部分領域にサブ分割された物体に対してローカル多極展開が行われる。最後にステップ1cではグローバル多極展開とローカル多極展開との重畳により物体の電磁場が求められる。

【図面の簡単な説明】

20 【図1】物体の電磁場を求める方法のステップを示すブロック線図である。

【図2】外部の場の中の完全導体を示す略図である。

【図3】線重み付け法における幾何学的大きさを示す略線図である。

【図4】第mのエレメント対への第nのエレメント対の影響を示す略線図である。

【図5】インピーダンスを有するエレメントにおける、分布インピーダンスと、集中インピーダンスとを示す略線図である。

30 【図6】細分化ステップ2、3及び4のための部分領域内の車体の分割を示す略線図である。

【図7】変化するエレメント寸法における部分領域内の分割を示す略線図である。

【図8】球座標 r 、 θ 、 α を示す略線図である。

【図9】グローバル多極展開のための幾何学的変数を示す略線図とローカル多極展開のための幾何学的変数を示す略線図である。

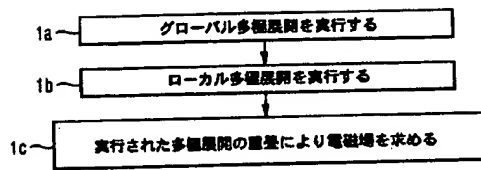
【図10】導体ループと4つの部分領域への基底関数の分割とを示す略線図と互いにキャンセルせず ϕ の展開における打ち切り誤差を発生する部分領域の端縁において発生する電荷を示す略線図である。

【図11】直接結合及び間接結合されている部分領域を示す略線図である。

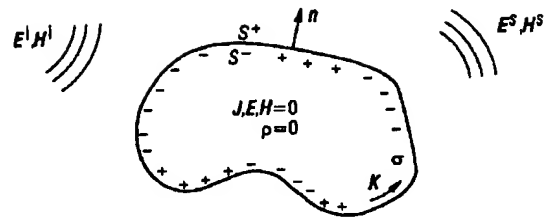
【図12】移動のための幾何学的変数を示す略線図である。

【図13】2段FMMのための直接結合及び間接結合された部分領域を示す略線図である。

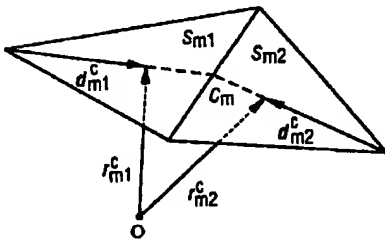
【図1】



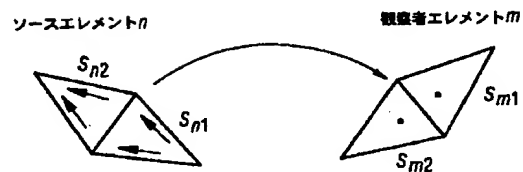
【図2】



【図3】



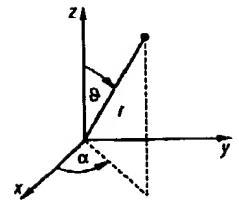
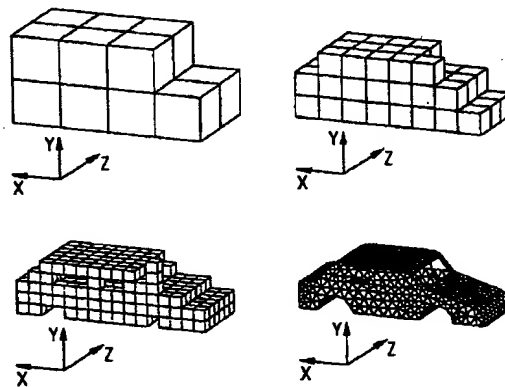
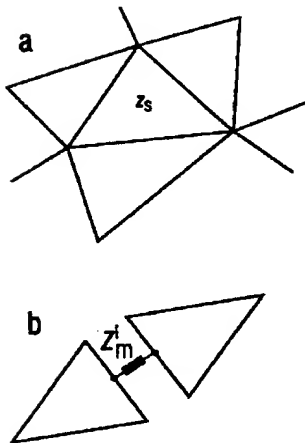
【図4】



【図5】

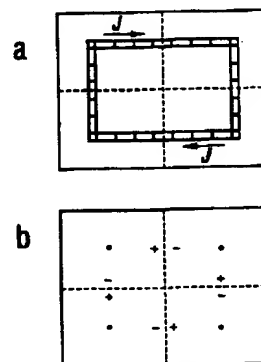
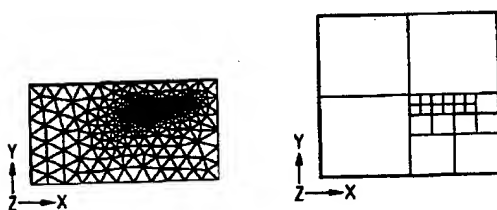
【図6】

【図8】

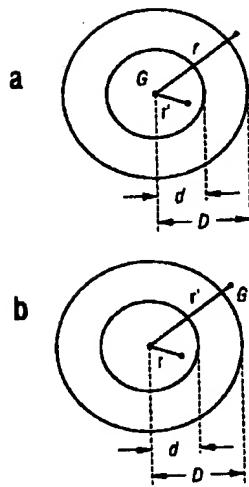


【図10】

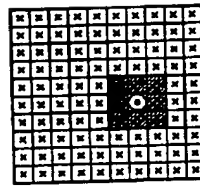
【図7】



【図9】

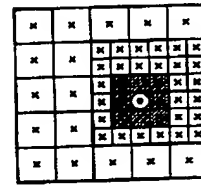


【図11】



- 観測領域 BG
- 隣接領域 NG
- 遮距離領域 WEG
-
- ⊠ グローバル多層展開 GMPE
- ⊡ ローカル多層展開 LMPE

【図13】



- 観測者領域 BG
- 隣接領域 NG
- 遮距離領域 WEG
-
- ⊠ グローバル多層展開 GMPE
- ⊡ ローカル多層展開 LMPE

【図12】

